

Безлинейное

1. Уравнение в частных производных порядка m .

$\square F = F(x, \dots, p_{i_1 \dots i_m}, \dots)$ - действ. ф-ция

$p_{i_1 \dots i_m}$ - действ. переменные, $\sum i_j = k$, где $k = 0, \dots, m$

если хотя бы одна $\frac{\partial F}{\partial p_{i_1 \dots i_m}} \neq 0$, $\sum i_j = m$, то

$F(x, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}, \dots) = 0$ и есть ур-е в чп.

2. Линейное ур-е в частных производных

$$\sum_{k=0}^m \sum_{i_1 \dots i_k} A_{i_1 \dots i_k}^k(x) \cdot \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = f(x)$$

3. Линейное ур-е в частных производных 2-го порядка

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) \cdot u = f(x)$$

4. Характеристическая форма (квадратная) $\rightarrow Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \cdot \lambda_i \cdot \lambda_j$

Канон. вид: $Q = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \xi_i^2$

5. Классификация (типы) уравнений

- гиперб., если $\alpha_1 = -1$, ост. $= +1$ и наоборот ("vice versa") (волн)

- эллип., если все $= 1$ или все $= -1$ (лаплас)

- параб., если $\alpha_1 = 0$, остальные одного знака. (тепл./пробл.)

6. Равномерно эллип. $\Rightarrow \exists k_0, k_1 : \left(k_0 \cdot \sum \lambda_i^2 \leq Q(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq k_1 \cdot \sum \lambda_i^2 \right)$

7. Классификация m -простому (2й порядок, 2 перемен.)

$$A \cdot u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

$$Q(y_1, y_2) = A y_1^2 + 2B y_1 y_2 + C y_2^2$$

$$D = - \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = B^2 - AC$$

$D > 0 \Rightarrow$ гиперб.

$D < 0 \Rightarrow$ эллип.

$D = 0 \Rightarrow$ параб.

8. u - регулярное, если опр., непр. вместе с чп и обр. в тожд-во

9. Гармоническая ф-ция u : $\Delta u = 0$ и $u \in C^2(D)$; $u(x_0) = \frac{1}{V} \int_V u dV$ - в шар

10. Задача корректна, если реш. $\exists!$ и уст. (непр. зав. от. нач. данных)

11. Свойства гармонической ф-ции (ГФ)

1° $u - \text{ГФ} \Rightarrow u(\lambda \cdot C \cdot x + h) - \text{ГФ}$, $C^T = C^{-1}$ - ортост. м-мат

2° $u_1, \dots, u_m - \text{ГФ} \Rightarrow u = \sum u_k \cdot c_k - \text{ГФ}$

3° - ф-ция Грина

4° $u - \text{ГФ}$, $u \in C^1(\bar{D})$, $u|_S = 0 \Rightarrow u(x) = 0$

5° $u - \text{ГФ} \Rightarrow \int_D \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$

12. Интегральное предст. (ГФ) гармонической ф-ции

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \left(E \cdot \frac{\partial u}{\partial n} - u \cdot \frac{\partial E}{\partial n} \right) ds, \text{ где}$$

$$E(x, y) = \begin{cases} -\ln|x-y|, & n=2 \\ \frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

$$\omega_n = \frac{2 \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \cdot n$$

площадь пов-ти ед. сферы

13. Среднее для гармонической ф-ции

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n \cdot R^{n-1}} \cdot \int_{S_R} u(y) ds_R - \text{ср. по сфере}$$

$$\left[\text{где } \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx \right]$$

$\omega_n =$

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n \cdot R^n} \cdot \int_{B_R} u(y) d\tau - \text{ср. по шару. шар: } |x-y| \leq R$$

14. принцип экстремума (эллип.)

вопрос 140

15. потенциал двойного слоя:

$$V(x) = \frac{1}{\omega_n} \int \frac{\partial E}{\partial n} \cdot \mu ds_y$$

простого слоя:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int E \cdot \mu ds_y$$

16. Канонический вид гиперболического ур-я общего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + \dots = F \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + cu = F$$

17. Задача Коши для гиперб. ур-я

$$[u_a = A+B, u_b = A-B, u_c = C, u_f = F]$$

$u(P) = \Phi(P)$, $\frac{\partial u(P)}{\partial \nu} = \Psi(P)$, $P \in \sigma$. σ - разбитая дуга Жордана с непр. кривизной, не имеющая точек касания с характеристиками.

Q, Q' - т. пересечения характеристик с ~~прямой~~ кривой

18. Классическое решение - рег. реш., удовл. КУ, НУ, смешанным и прочее в обычном смысле, т.е. в $\forall$ точке носителя данных.

19. I вариационная задача

~~Есть задача Дирихле для уравнения Лапласа~~

Надо найти среди допустимых ф-ий ту, которая делает интеграл Дирихле минимальным $\rightarrow \int_{\Omega} u_x^2 + u_y^2 dx dy$
 1-я кр. з для $\Lambda \sim$ IVЗ.

20. Допустимая ф-ия - непр. в $\bar{\Omega}$ ~~не имеет~~ имеет кусочно-непрерывные производные в Ω , для нее $\exists$ инт. Дирихле и она удовл. КУ

21. II вариационная задача

Найти среди допустимых ф-ий минимум ф-ла $J(u)$.

$$J(u) = \frac{D(u)}{H(u)}, \quad D(u) = \int_{\Omega} u_x^2 + u_y^2 dx dy, \quad H(u) = \int_{\Omega} u^2 dx dy$$

решение II ВЗ $u(x,y) : \lambda = J(u)$ - наим. с.з.,
 u - с.ф. для задачи $\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}, \quad \lambda = \text{const.}$

22. Обобщенная производная - ф-ия $v = D^k u$ ~~если~~
 если для $\forall \varphi \in C^2(\bar{\Omega})$:

$$\int_{\Omega} D^k u \cdot \varphi d\Omega = (-1)^k \int_{\Omega} u \cdot D^k \varphi d\Omega \quad v \in L_p(\Omega)$$

D^k - ч.п. порядка k .

23.

Обобщенные решения: (подробности в [17][18][19])

— для эллиптического типа: это ф-ция $u \in \dot{W}_2^1$, для которой:

$$\int_G \left(- \sum A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v + cuv - fv \right) dx = 0$$

для $\forall v \in \dot{W}_2^1$, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ — обобщ. произв. 1-го порядка
(A_{ij}, e_i, c — отр. и измеримы)

— для гиперболического типа: это ф-ция $u \in \dot{W}_2^1$, если

$$\left. \begin{aligned} \int_G \left(- \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \sum A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v - cuv \right) dx dt &= 2 \\ &= \int_G \varphi(x) \cdot v(x, 0) dx + \int_Q f \cdot v dx dt, \end{aligned} \right\}$$

для $\forall v \in \dot{W}_2^1(Q)$, $v(x, T) = 0$, $f \in L_2(G)$

$$Q = \{ G \times (0 < t < T) \} \subset \Omega \subset E_{n+1}$$

это если в задании $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(x)$, $u|_S = 0$,
[L-равномерно эллип.]

$$u(x, 0) = \tau; \quad S = \{ \partial G \times (0 \leq t \leq T) \}, \quad T = \text{const} > 0$$

— для параболического типа: это ф-ция $u \in \dot{W}_2^1$, если

$$\left. \begin{aligned} \int_Q \left(- u \frac{\partial v}{\partial t} + \sum A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - \sum e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v - cuv \right) dx dt &= \\ &= \int_G \varphi \cdot v(x, 0) dx + \int_Q f \cdot v dx dt, \end{aligned} \right\}$$

для $\forall v \in \dot{W}_2^1$, $v(x, T) = 0$

$$Q = \{ G \times (0 < t < T) \} \subset \Omega$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \in G, \quad u(x, t) \Big|_S = \psi(t), \quad \varphi \in L_2(Q)$$

Подробности в [17] [18], [19] вопросах